Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2016-2017 **Lycée :** I.A Saint-Louis	**COMPO HARMONISÉE** **(2nd Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBA

Exercice 1 :

Une urne contient N boules indiscernables au toucher dont une porte le numéro 1, deux portent le numéro 2, n portent le numéro n, où n est un entier naturel impair strictement supérieur à 1.

1. On tire une boule de l'urne.

Soit E l'événement « la boule tirée porte un numéro pair » et F l'événement « la boule tirée porte un numéro impair ».

a) Montrer que $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) En posant $n = 2k + 1$ (k etant un entier naturel non nul), montrer que :

$$card\ E = \frac{(n-1)(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad card\ F = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

c) En déduire les probabilités des événements E et F.

2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité pour que la somme des numéros portés par les deux boules soit un nombre impair.

3. Dans cette question, on prend $n = 19$.

On tire une boule de l'urne. On désigne par A l'événement « le numéro de la boule tirée est un multiple de 5 ou un multiple de 7 » et par B l'événement « le numéro de la boule tirée est impair ».

a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 :

I. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a^3 + b^3$ est divisible par 173. On notera que 173 est un nombre premier.

1. Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}$ [173].
2. Montrer que a est divisible par 173 si et seulement si b est divisible par 173.
3. On suppose que a est divisible par 173. Montrer que $a + b$ est divisible par 173.
4. On suppose que a n'est pas divisible par 173.
   a) A l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que $a^{172} \equiv b^{172}$ [173].
   b) Montrer que $a^{171}(a + b) \equiv 0$ [173].
   c) En déduire que $a + b$ est divisible par 173.

II. Dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E) : $x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, une solution de l'équation (E).

On pose $x + y = 173k$ où k est un entier naturel non nul.

1. Vérifier que $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.
2. Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

PROBLEME

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2cm.

PARTIE A

Soit A le point d'affixe 3 + i et B le point d'affixe 6.

Pour tout réel θ, on considère les deux points points M_θ d'affixe $3-\sin\theta+i\cos\theta$ et N_θ d'affixe $3(1+\cos\theta)+3i\sin\theta$.

1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe T_θ telle que :
   $T_\theta(A)=M_\theta$ et $T_\theta(B)=N_\theta$.
2. Donner l'écriture complexe de T_θ puis préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ tels que : $(y^2-8y+15)e^{y-3}+3-x=0$.

On désigne par $(\mathscr{C}_1)$ l'image de $(\mathscr{C})$ par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}_1)$ est la courbe de la fonction $k : x \mapsto (x^2+2x)e^{-x}$.

b) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^x k(t)dt$.

c) Déterminer les images par $T_{\frac{\pi}{2}}$ des droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives y = 0 ; x = 3 et y = 3.

d) Calculer l'aire du domaine D délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 3 et y = 3.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} k(x) & si\ \ x\le 0 \\ \frac{-x^2\ln x}{1+x} & si\ \ x>0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit h la fonction définie par $h(x)=(x+2)\ln x+x+1$.

a) Etudier le sens de variation de la dérivée h' de h.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,1. Déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation (on pourra utiliser 1. et 2.)
4. a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ courbe représentative de f.

b) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

PARTIE C

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose sur [0 ;1], $\begin{cases} g_n(t)=-t^n\ln t & si\ t\neq 0 \\ g_n(0)=0 \end{cases}$

$J_n=\int_0^1 g_n(t)dt$ et $J=\int_0^1 f(t)dt$.

1. a) Montrer que J_n existe.

b) En admettant que $J_n=\lim\limits_{x\to 0}\int_x^1 g_n(t)dt$ pour $x\in\,]0\,;1]$, calculer J_n.

2. Soit t un nombre réel et $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $(1+t)(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1})=1-(-1)^nt^n$.

b) Montrer que :

$$\forall\, t\in[0;1],\ \ g_2(t)-g_3(t)+\cdots+(-1)^{n-1}g_{n+1}(t)+(-1)^n\,\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}=f(t)$$

puis que : $J=J_2-J_3+J_4+\cdots+(-1)^{n-1}J_{n+1}+(-1)^n\int_0^1\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,dt$.

c) En s'aidant d'une majoration de $\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1 + t} dt \leq \frac{1}{(n+3)^2}$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+2)^2}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \mathrm{J}$.