Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2011-2012 **Lycée :** LEPAC (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(1er Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. Ndiaye

EXERCICE 1 : (3 points)

Démontrez que pour tout naturel p et pour tout naturel $n \geq p+2$, on a :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

a) par un calcul direct ;

b) en dénombrant pour un ensemble E de cardinal n, le nombre de parties ayant p éléments :
- contenant a et b ;
- contenant a ou b ;
- ne contenant ni a ni b,

où a et b sont deux éléments distincts de E.

EXERCICE 2 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm). On appelle A le point d'affixe -2i. Á tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$z' = -2\bar{z} + 2i$.

1) On considère le point B d'affixe b = 3-2i.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.

2) Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation y = -2 alors M'appartient aussi à (Δ).

3) Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interpréter géométriquement cette égalité.

4) Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de z + 2i.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

b) Démontrer que (z + 2i)(z' + 2i) est un réel négatif ou nul.

c) En déduire un argument de z' + 2i en fonction de θ.

d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites [AM) et [AM') ?

5) En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 3 : (3 points)

Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormale directe. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le centre du carré ADHE.

1) Vérifier que $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. En déduire l'aire du triangle IGA.
2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (IGA).
3) Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MD}$.

PROBLEME : (9 points)

Dans ce problème, n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ comme suit : $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & , \ si\ x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2cm et on note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n.

PARTIE A

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction f_1.

1) a) Etudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.

b) Etudier le comportement du rapport $\frac{f_1(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. Que peut-on en conclure pour la fonction f_1 en 0 et la courbe $(\mathcal{C}_1)$?

2) a) Justifier la dérivabilité de f_1 sur $]0;+\infty[$. Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$.

b) Etudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1.

3) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$, son asymptote et la tangente au point O.

PARTIE B

La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis son comportement en $+\infty$.

2) a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0;+\infty[$. Démontrer que $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$, où g_n est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ que l'on déterminera.

b) Etudier les variations de la fonction g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f_n.

PARTIE C

La troisième partie porte sur les courbes $(\mathcal{C}_n)$ lorsque $n \geq 2$.

1) Quelle est la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en O, origine du repère ?

2) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et de $(\mathcal{C}_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Quelle est la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$?

3) a) Sachant qu'on a : $\forall\, x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$. Que peut-on en conclure pour $(\mathcal{C}_2)$?

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.