Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2014-2015 **Lycée :** LAF (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(2nd Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBA

Exercice 1 : (*5 points*)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Le point B_1 est le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC. On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. **a**) Construire le point D tel que $r_B(D) = A$ et montrer que les points A, C et D sont alignés.
0,25+0,5 pt

b) Justifier que $r_A o\, r_B$ est une rotation. *0,25 pt*

Déterminer l'image du segment [BD] par $r_A o\, r_B$. *0,5 pt*

En déduire que le centre de $r_A o\, r_B$ est l'orthocentre H du triangle ABC. *0,75 pt*

2. **a**) Montrer que les droites (HC) et (BD) sont parallèles. *0,5 pt*

La droite (BC) coupe (DH) en B_2. On désigne par h_1 l'homothétie de centre B_1 qui transforme C en D et par h_2 l'homothétie de centre B_2 qui transforme D en H.

b) Déterminer l'image du segment [CH] par h_1 ainsi que l'image du segment [DB] par h_2. *2×0,25 pt*

Reconnaître les applications $h_1 o\, h_2$ et $h_2 o\, h_1$ et donner leurs éléments géométriques caractéristiques. *2×0,5 pt*

c) On note I_1 et I_2 les centres respectifs de $h_1 o\, h_2$ et $h_2 o\, h_1$.
Vérifier que les quatre points I_1, I_2, B_1 et B_2 sont alignés. *0,75 pt*

Exercice 2 : (*5 points*)

1. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs, solutions de l'équation

(E) : $8x - 5y = 1$. *0,5 pt*

2. Soit m un entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) d'entiers relatifs vérifiant
$m = -8p + 4$ et $m = -5q + 3$.

a) Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E). *0,5 pt*
En déduire que $m \equiv -12\ [40]$. *0,5 pt*

b) Réciproquement si $m \equiv -12\ [40]$, montrer qu'il existe un couple (p, q) d'entiers relatifs vérifiant $m = -8p + 4$ et $m = -5q + 3$. *0,5 pt*

c) Déterminer le plus petit des entiers naturels m tels qu'il existe un couple (p, q) d'entiers relatifs vérifiant $m = -8p + 4$ et $m = -5q + 3$. *0,5 pt*

3. Un groupe de 8 menuisiers se partage à parts égales m planches de bois, il reste 4 planches qu'ils gardent dans le magasin.
Un autre groupe de 5 menuisiers se partage le même nombre de planches à parts égales, il reste 3 planches qu'ils gardent dans le magasin.
Quelle est la valeur minimale de m ? *0,75 pt*

Les questions qui suivent sont indépendantes de ce qui précède.

4. **a**) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $2^{3k} \equiv 1\ [7]$. *0,25 pt*
b) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2012} par 7 ? *0,25 pt*

5. Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec a non nul.
On considère les nombres de la forme $N = a\,10^3 + b$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres N, ceux qui sont divisibles par 7.
a) Vérifier que $10^3 \equiv -1\ [7]$. *0,25 pt*
b) En déduire tous les entiers naturels N cherchés. *1 pt*

PROBLEME (*10 points*)
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où l'unité de longueur est 2 cm

Partie A (*5,25 points*)

Soit f_1 la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f_1(x) = \sqrt{3x(x-2)}$.

1. **a**) Montrer que la courbe (C_1), représentative de f_1, admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie. Préciser les asymptotes de (C_1). *2×0,5 pt*
b) Etudier les variations de f_1 et déterminer les tangentes T_0 et T_2 à (C_1) aux points d'abscisses respectives 0 et 2. *2×0,5 pt*
Construire la courbe (C_1), ses asymptotes et les tangentes T_0 et T_2. *1 pt*

2. Soit la fonction f_2 de la variable réelle x définie par $f_2(x) = -f_1(x)$.
a) Montrer que la courbe (C_2) représentative de f_2 et la courbe (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. *0,25 pt*
Construire la courbe (C_2) dans la même figure que (C_1). *0,5 pt*
b) Montrer que la courbe $(\mathscr{H}) = (C_1)\cup(C_2)$ a pour équation : $3x^2 - 6x - y^2 = 0$. *0,5 pt*

3. On considère dans $\mathscr{P}$ la transformation S qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point S(M) = M' de coordonnées (x', y') telles que $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$.
a) Exprimer z' affixe de M' en fonction de z, affixe de M. *0,25 pt*
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. *0,25 pt*
b) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $(\mathscr{H}') = S(\mathscr{H})$. *0,5 pt*

Partie B (*4,75 points*)

On considère l'ensemble des fonctions numériques g_m de la variable réelle x définies par : $g_m(x) = \ln\sqrt{3x(x-2m)}$, avec m réel strictement positif. On notera (Γ_m) la courbe représentative de g_m dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. **a**) Montrer que (Γ_1), courbe représentative de g_1, admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie. *0,25 pt*
Etudier les variations de g_1 et construire (Γ_1) après avoir étudié les branches infinies.

0,75 pt

b) λ étant un réel strictement supérieur à 2, calculer $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{3} g_1(x)\, dx$. *0,5 pt*

Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} I(\lambda)$. *0,25 pt*

2. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ l'application t_m qui au point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $t_m(M) = M'$ avec $\begin{cases} x' = mx \\ y' = y + \ln m \end{cases}$.

a) Quelle est la nature de t_1 ? *0,25 pt*

Montrer que : $\forall\, m, n \in \mathbb{R}_+^*,\ t_m o\, t_n = t_{mn}$. *0,5 pt*

En déduire que pour tout réel strictement positif m, t_m est bijective et déterminer sa bijection réciproque. *2×0,5 pt*

b) Justifier que t_m est une application affine. *0,25 pt*

3. **a**) Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{R}_+^*,\ t_m(\Gamma_1) = (\Gamma_m)$. *0,5 pt*

b) Montrer qu'il existe une application affine par laquelle deux courbes quelconques (Γ_m) et (Γ_n) se déduisent l'une de l'autre. *0,5 pt*