Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2017-2018 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(2nd Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

EXERCICE 1 (*5 points*).

A. Une urne contient 2 boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher.
Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches».
Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

B. Dans toute la suite de l'exercice, on prend n = 4.

1. Un joueur tire simultanément deux boules et on note :
A_0 l'événement : « le joueur a tiré deux boules noires» ;
A_1 l'événement : « le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche» ;
A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches» ;

a) Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1.

b) Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

2. Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.
Soit B_k l'événement : « on obtient k boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage »
(k = 0 ou k =1 ou k =2).

a) Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$. En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

b) Démontrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$.

En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE 2 (*5 points*).

Soient A et C deux points distincts du plan, (Γ) le cercle de diamètre [AC], O le centre de (Γ) et B un point de (Γ) distinct de A et C. On construit le point D de sorte que le triangle BCD soit équilatéral direct. On désigne par G le centre de gravite du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.
Faire une figure.

1. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe **s** de centre C transformant B en M.

3. On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1. Soit E le point tel que ACE soit équilatéral direct.

a) Déterminer l'affixe du point E.

b) Soit **s'** la similitude directe d'écriture complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$.
Déterminer les éléments caractéristiques de **s'** et en déduire que **s'** = $\mathbf{s}^{-1}$.

c) Montrer que le point E', image de E par **s'**, appartient à (Γ).

4. On note ($\mathcal{C}$) le lieu des points M lorsque le point B décrit (Γ) privé des points A et C.

a) Montrer que le point E appartient à ($\mathcal{C}$).

b) Soit O' l'image du point O par **s**. Démontrer que O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de ($\mathcal{C}$).

PROBLEME (*10 points*).

Partie A

1) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x(2-x) - 2$.

a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On notera α la solution non nulle et on vérifiera que 1 < α < 2.

c) En déduire le signe de φ.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{x\,\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$.

d) Etudier les variations de f et construire sa courbe (on prendra α = 1,6).

3) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Justifier l'existence de F.

b) Montrer que F est continue et strictement croissante sur I = $\mathbb{R}_+$.

c) Donner la forme de F(I).

4) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t}\,dt$.

a) Justifier l'existence de G.

b) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en +∞ que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout $t \in [\ln 2\,; +\infty[$, on a $f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$.

d) En déduire qu'il existe un réel M tel que pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a F(x) ≤ M.
En déduire que F admet une limite finie ℓ en +∞.

Partie B

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}.$$

c) Calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt}\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

d) Montrer que $I_n(x)$ admet une limite quand x tend vers +∞.

2) a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)\,e^{-nt} dt.$$

En déduire que la fonction H_n, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$H_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^{n} I_k(x)\,,$$

admet une limite notée I_n lorsque x tend $+\infty$ vérifiant : $\ell - I_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right)$.

b) En utilisant la question B-1)a), montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

c) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$.

Montrer que cette suite est convergente vers un réel ℓ' tel que $\ell = 2\ell'$.