Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2017-2018 **Lycée :** LPAC (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(1er Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 (*4 points*)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs A, B et C.

On note D = r_B(A) et r_C(D) = E.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B. En déduire la position du point E.

2. On admet qu'il existe une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire l'image de E par S.

3. On désigne par Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.

4. a) Déterminer l'image de la droite (AE) par S.

b) Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par S est le point I milieu de [DE].

Exercice 2 (*5 points*)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire (H).

2. On étudie en fonction du temps t le mouvement du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, du plan tel que

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right[$$

a) Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (H) que l'on précisera.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et en déduire la tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.

c) Déterminer les coordonnées du vecteur accélération et vérifier que le mouvement est accéléré.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur]1 ;+∞[par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

On se propose de déterminer la limite de la suite (S_n) de terme général :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1. Soit k un entier naturel non nul. Etablir les relations suivantes :

$$a)\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k} \qquad\qquad b)\ \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$$

2. **a**) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

b) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Calculer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

c) Déduire des résultats de la question **1.)** que :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq u_n.$$

Déterminer alors la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k).$$

d) Montrer que :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = S_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right).$$

En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 *(6 points)*

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre **1**, deux qui portent le nombre **e** et six qui portent le nombre $\mathbf{\frac{1}{e}}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe z = ln x + i ln y.

1) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ''M appartient à l'axe des abscisses'' ; **B** : ''M appartient à l'axe des ordonnées'' ;

C : ‘‘M appartient aux deux axes’’ ; **D** : ‘‘M n’appartient à aucun des axes’’ ;

E : ‘‘l’angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est égal à $-\frac{\pi}{4}$ ’’ ; **F** : ‘‘le point M appartient au cercle trigonométrique ’’.

2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la fonction de répartition de X puis la représenter graphiquement.