Année Scolaire : 2016-2017 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(1er Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 : (4,5 points)

1. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
 a) Démontrer que si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7], alors $ac \equiv bd$ [7].
 b) Démontrer que pour a et b non nuls, si $a \equiv b$ [7], alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ [7].
2. Si on suppose qu'aujourd'hui c'est Mercredi, alors quel jour de la semaine sera-t-on dans 25 ans ? (On admet qu'une année est égale à 365 jours).
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7. Montrer que $a^6 \equiv 1$ [7].
4. On appelle *ordre* de a modulo 7, le plus petit entier naturel k non nul tel que : $a^k \equiv 1$ [7]. On note $ord(a) = k$.
 a) Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie : $a^r \equiv 1$ [7].
 b) En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
 c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
5. À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
 Déterminer le reste de la division euclidienne de A_{2017} par 7.

Exercice 2 : (3,5 points)

Les questions 1. et 2. Sont indépendantes.

1. E et F sont deux points distincts d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
 Soit (Δ) la tangente à $\mathscr{C}$ en E.
 a) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de E et F, on a :

$$2(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \quad (2\pi).$$

 b) Montrer que pour tout point T de (Δ) distinct de E, on a :

$$2(\overrightarrow{ET}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \quad (2\pi).$$

 Montrer que la réciproque est vraie.

2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$ (2π).
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I et J les milieux de [AB] et [BC].
 (i) Montrer que les points A, I, J et H sont cocycliques.
 (ii) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$ (2π).
 a) Justifier que le point C appartient à (Γ). Déterminer et construire (Γ).
 b) Montrer que le symétrique A' de A par rapport à H, appartient à (Γ).

Problème : (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J), d'unité graphique 3cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère.

1. a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. Construire $(\mathcal{C})$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ et F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Etudier le sens de variation de F sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) Démontrer que pour tout réel positif t, on a : $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \leq f(x) \leq e^{-2x}$.

3. Démontrer que : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

4. Démontrer que F admet, en $+\infty$, une limite finie ℓ que l'on encadrera.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = F(n+1) - F(n)$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à F sur $[n\,, n+1]$, montrer que : $\ln(1 + e^{-2n-2}) \leq u_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$.

3. Déterminer la limite de (u_n).

4. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exprimer S_n à l'aide de F et de n. La suite (S_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Partie D

On se propose dans cette partie d'étudier la suite de nombres réels (v_n), définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 1 + \frac{1}{e} \\ v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) v_n \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n > 0$.

b) Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln v_n = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{2}\right) \quad \textbf{(1)}$$

2. En montrant que pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$, $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$, déduire que pour tout réel positif x : $e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \leq e^{-x}$ **(2)**

3. On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$A_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ et $B_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a) Simplifier A_n et B_n.

b) A l'aide des relations **(1)** et **(2)**, montrer que : $A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \ln v_n \leq A_n$.

c) En déduire que la suite $(\ln v_n)$ est majorée.

4. a) Montrer que la suite (v_n) est convergente. On note λ sa limite.

b) Montrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln \lambda \leq \frac{1}{e-1}$.