Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2015-2016 **Lycée :** LPAC (Saint-Louis)	**COMPOSITION** **(1er Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

EXERCICE 1 : (6 points)

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
   a) Etudier les variations de g. Calculer ses limites en 0 et $+\infty$.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution et une seule α appartenant à l'intervalle $[-2, -1]$. Montrer que $\alpha = -1-\sqrt{2}\, e^{\alpha/2}$.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-2, -1]$ par : $f(x) = -1-\sqrt{2}\, e^{x/2}$.

2) a) Etudier les variations de f sur I.
   b) En déduire que pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I.
   c) Montrer que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.
   d) On rappelle que $f(\alpha) = \alpha$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout élément x de I, on a : $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

3) On définit la suite (U_n) par $U_0 = -2$ et pour tout $n \ge 0$; $U_{n+1} = f(U_n)$.
   Justifier les trois propriétés suivantes :
   a) Pour tout entier naturel n, U_n appartient à I et $|U_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$.
   b) Pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   c) La suite (U_n) converge vers α.

4) Donner un entier naturel p tel que des majorations précédentes on puisse déduire que U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 : (4 points)

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
   En déduire que $3^{2n+2} + 7$ et $3^{2n+4} - 1$ sont des multiples de 8.
2) Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des puissances de 3.
3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par :
   $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.
   a) Si $p = 2n$, alors quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 8 ?
   b) Démontrer que, si $p = 2n + 1$, alors A_p est divisible par 8.
4) On considère les nombres a et b écrits dans le système de base 3 :
   $a = \overline{1110}^{\,3}$ et $b = \overline{101010100}^{\,3}$.
   Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ?

5) De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}^{\,3}$.
Démontrer que c est divisible par 16.

PROBLEME : **(10 points)**

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

La représentation graphique de f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal est notée C_n (unité : 2 cm).

A. Etude des variations de f_n.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^2 - n + n\ln x.$$

a) Etudier g_n ; préciser ses limites en 0 et $+\infty$.
b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n et que cette solution est dans $[1, 3]$.

2) Montrer que : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$; en déduire le sens de variation de f_n.

3) **a)** Etudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.
b) Montrer que la droite D_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe C_n.
c) Etudier la position de C_n par rapport à D_n.

B. Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1) α_n étant le nombre défini en A.1), montrer que $\alpha_1 = 1$ et que $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$.
2) **a)** En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 précédent, montrer que : $f_2(\alpha_2) \geq -1{,}24$.
b) En utilisant le sens de variation de f_2, montrer que : $f_2(\alpha_2) \leq -1{,}10$.
3) Donner les tableaux de variations de f_1 et f_2.
4) Représenter dans le repère les droites D_1 et D_2 puis les courbes C_1 et C_2.
5) Déterminer la primitive F_1 de f_1 qui s'annule en 1.

C. Etude des positions relatives des courbes C_n.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $]0, +\infty[$ calculer $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
Calculer la limite en $+\infty$ de cette différence.

2) Soit d la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $d(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Etudier d, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
b) Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul $f_n(\beta) = \beta$.

3) **a)** À l'aide des résultats obtenus dans les questions **1)** et **2)** de cette partie **C.**, établir que toutes les courbes C_n se coupent en un point A.
b) Préciser les positions relatives de C_n et C_{n+1}.