# Axlou Toth pour l'Innovation

| | | |
|---|---|---|
| **Année Scolaire** : 2019-2020<br>**Lycée :** Cours d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth | **SÉRIE D'EXERCICES N°1**<br>**Polynômes et Fractions rationnelles** | **Niveau** : 1S1/C<br>**Professeur** : M. Diallo |

**Exercice 1 :**

On considère le polynôme $P(x)=(m^2-m-2)x^3-(m+1)x^2+(m-2)x+2m-1$

Déterminer le réel m pour que :

a) d°P= 3 ; b) d°P = 2 ; c) d°P = 1.

**Exercice 2 :**

Soit $m \in \mathbb{R}$ $et$ $P(x)$ le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - (3+2m)x^2 + (6m+2)x - 4m$.

1) Vérifier que $P(2m) = 0$.
2) Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
3) Résoudre en discutant suivant les valeurs de $m$ l'inéquation $P(x) > 0$.

**Exercice 3:**

Soit $\mathrm{a(x)}$ et $\mathrm{b(x)}$ des polynômes donnés. En utilisant la division euclidienne, déterminer $\mathrm{q(x)}$ et $\mathrm{r(x)}$

tels que: $\mathrm{a(x) = b(x)q(x) + r(x); d°r < d°b}$ dans les cas suivants

1. $\mathrm{a(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1\,; b(x) = x^2 - 3x + 1}$
2. $\mathrm{a(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 9\,; b(x) = x^3 - x + 2}$
3. $\mathrm{a(x) = 2x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x - 5\,; b(x) = x^2 - x - 5}$

**Exercice 4 :**

Déterminer les coefficients a et b pour que :

Le polynôme $\mathrm{x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1}$ soit le carré d'un autre polynôme.

**Exercice 5 :**

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1) Déterminer un polynôme Q(x) et le polynôme R(x) du premier degré, tels que : $P(x) = (x^2 - 2x - 1)Q(x) + R(x)$
2) En déduire le reste de la division de P(x) par $\left(x-1-\sqrt{2}\right)$.
3) Déterminer $P(1-\sqrt{2})$.

**Exercice 6 :**

1. Soit $P(x) = 2x^4 + x^3 - 20x^2 - 13x + 30$. Vérifier que 1 et $-\frac{2}{5}$ sont racines de P.

Factoriser P(x) par la méthode des coefficients indéterminés.

2. Soit le polynôme $P(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x^2 - 3x + \sqrt{2}$.

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x - 1 - \sqrt{2})Q(x)$.

Déterminer Q(x) en utilisant la méthode de Horner et puis factoriser P(x)

**Exercice 7 :**

Soit $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1) Sachant que $P(x)$ admet quatre racines $a, b, c$ et $d$ qu'on ne calculera pas, déterminer $a + b + c + d, ab + ac + ad + bd + cd, abc + acd + abd + bcd$ et $abcd$.
2) Sachant que $c = 1$ et $d = 2$, déterminer $a$ et $d$ à l'aide de la question 1)
3) On suppose $a = -1$ et $b = -2$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$ puis l'inéquation $P(1 - x) \leq 0$

**Exercice 7 :**

**A.** Soit $P(x) = x^4 - 6x^3 + \alpha x^2 + 42x + 40$

1. Déterminer $\alpha$ sachant que $P$ admet quatre racines dont la somme des deux racines est égale à la somme des deux autres racines.
2. Dans toute la suite, $\alpha$ prend la valeur précédemment trouvée. Factoriser $P(x)$
3. Déterminer le couple $(\beta, \theta)$ tels que le polynôme $Q(x) = \beta x^4 - 7x^3 - \beta x^2 + \theta x + 6$ soit divisible par le polynôme $x^2 - 2x - 3$.
4. Résoudre dans R l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

**B.** Soit le polynôme $P(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ ; (n étant un entier strictement positif).

1. Factoriser $H(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ puis montrer, pour tout $n > 0$, que $P(x)$ est divisible par $H(x)$.
2. Un polynôme $Q(x)$, divisé séparément par $(x - 2)$ et $(x + 1)$, donne respectivement pour reste 4 et 7. Soit $R(x)$ son reste par sa division euclidienne par le produit $(x - 2)(x + 1)$.

a- Justifier qu'on peut écrire $R(x) = \alpha x + \beta$ avec $\alpha$ et $\beta$ deux réels fixés.

b- Calculer alors $\alpha$ et $\beta$.

**Exercice 9 :**

Les nombres $a, b, c$ et $d$ sont tels que :

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}} \ ; b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}} \ ; c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}} \ ; d = \sqrt{4 + \sqrt{5 - d}}$$

1) Montrer que $a$ et $b$ sont solutions de l'équations $x^4 - 8x^2 + x + 11 = 0$.
2) Montrer que $c$ et $d$ sont solutions de l'équation $y^4 - 8y^2 - y + 11 = 0$.
3) En déduire que le produit $abcd$ est égal à 11.

**Exercice 10 :**

**A.** Soit $P(x)$ un polynôme dont les restes respectifs de la division euclidienne par $x+1$ et $x-3$ sont respectivement 4 et $-4$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x+1)(x-3)$.
2. Soit $A(x)$ et $B(x)$ le quotient et le reste de la division de $P(x^3)$ par $x^3+1$

a- Déterminer le polynôme $B(x)$.

b- Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par $x^3+1$.

3. Soit $g(x)$ un polynôme. Démontrer que $g(x)$ est divible par $(x-1)^3$ si et seulement si $P(x+1)$ est divisible par $x^3$.

**B.** Soit $f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

1. Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$.
2. En déduire que $P(x) = x^2$.

**C.** Soit le polynôme $P$ défini par : $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, $n$ est un entier naturel.

1. On pose $n = 6$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $P(x) = ax^7 + bx^6 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$. Factoriser le polynôme $P$ par $(x-1)^2$.
2. Déterminer les réels $a$ et $b$ de facon que le polynôme $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ soit divisible par $(x+1)^2$.

**D.** Démontrer que le polynôme : $Q(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par l'expression $(x-1)(x^2-1)$.

**E.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ est impair l'expression $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ est divisible par $(x+y)(x+z)(y+z)$.

**Exercice 11 :**

Soient $R$ $et$ $T$ les polynômes tels que $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $et$

$T(x) = 2x^n(3x-1)$

1) Déterminer le degré de chacun des polynômes : $R + T$ $et$ $R \times T$.
2) On admet l'existence d'un réel non nul $k$ tel que $R(x+k) = R(x)$ et on définit le polynôme $P$ tel que $P(x) = R(x) - R(0)$
   a) Déterminer $R(0); R(k); R(2k)$ $et$ $R(nk)$ où $n$ est un entier naturel.
   b) Justifier que $P$ est le polynôme nul
   c) En déduire une expression simple de $R(x)$.

**Exercice 12 :**

On considère, s'il existe, les polynômes $f_k(x)$ tel que : $f_0(0) = 0$ et $f_k(x) - f_k(x-1) = x^k$

1. Prouver $f_k(x)$ est de degré $k+1$ .
2. Prouver que $f_k(x)$est divisible par $x^2 + x$ .
3. Déterminer $f_k(x)$ pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

Déduire de ce qui précède l'expression en fonction de n des sommes : $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^k$, avec $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

**Exercice 13 :**

**Les parties sont toutes indépendantes**

**A.** Trouver tous les polynômes de degré 3 qui admettent 1, 2 et 3 racines

**B.** P est un polynôme $x \longmapsto x^4 - 5x^2 + 4x - b$

Pour quelle valeur de b peut-on écrire, pour tout réel x, $P(x) = (2x + 1)Q(x)$ avec Q un polynôme?

**C.** Calculer $(x^2 + px + q)^2$ et vérifier que $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ est le carré d'un polynôme de degré

**D.** Montrer que $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ est le carré d'un trinôme

**E.** Soit P le polynôme:

$$P(x) = x^{11} - 17x^{10} + 17x^9 - 17x^8 + \cdots - 17x^2 + 17x - 1$$

Calculer $P(16)$ et $P(18)$

**F.** n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $f_n$ est polynôme tel que pour tout réel x,

$$f_n(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1.$$

Démontrer qu'il existe un polynôme $Q_n$ tel que tout réel x,

$$f_n(x) = x(x + 1)(2x + 1)Q_n(x)$$

**G.** Déterminer qu'il existe un polynôme g tel que pour tout réel x,

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^3\, g(x)$$

**H.** Démontrer que pour tout réel t est une racine du polynôme

$f: x \longmapsto x^3 - (3 - t)x^2 + (2 + 3t)x - 2t$ . Factoriser alors $f(x)$

**I.** Soit $P(x) = x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x$

1. Trouver des réels a et b tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x^2 + 3x)^2 + a(x^2 + 3x) + b$
2. Factoriser P et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

**J.** Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 2x - 21$

1. Montrer que si n est un entier naturel tel que $f(n)$, alors n divise 21
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 21 et en déduire une racine de f
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$

**K.** Soit le polynôme $f(x) = 8x^3 - 16x - 3$

**Définition :** Soit a et b deux entiers relatifs, non nul. On dit que b est un diviseur de a, ou que a est un multiple de b, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. On dit aussi que b divise a et on note b|a.

**Exemple :** -2|14 car 14=-2(-7) ;3|-12 car -12=3(4)

1. a) Montrer que si n est un entier naturel tel que $f(n) = 0$, alors n divise 3

   b) En déduire que le polynôme f n'admet pas de racine entière

2. On se propose de chercher si f admet une racine rationnelle positive.

Soit deux entiers naturels a et b premiers entre eux, vérifiant $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

a) Montrer que $8a^3 - 16ab^2 - 3b^3 = 0$

b) En déduire que a divise 3 et que b divise 8.

c) Conclure

d) En déduire toutes les solutions rationnelles des équations

$4x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$

$2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$

**L.** Démontrer que $h(x) = \sqrt{1 + x + x^4}$ n'est pas un polynôme.

**M.** On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$.
Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

**N.** Soit p(x) un polynôme et q(x) = p(x) + 1. Démontrer que $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est divisible par p(x)q(x).

**Indication :** $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)$

**O.** Soit $P$ un polynôme de degré 2019 vérifiant $P(k) = k$ pour $k = 1,2, \dots, 2019$ *et* $P(0) = 1$

Trouver $P(-1)$

**Indication :** Considérer $Q(x) = P(x) - x$.

**P**. Soit $P$ un polynôme de degré 4 tel que $P(0) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$ *et* $P(4) = 16$.

Calculer $P(-2)$.

**Q.** $\alpha, \beta$ *et* $\gamma$ étant les trois racines $x^3 - x - 1$,

Calculer $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$

**R**. Soit $P$ un polynôme à coefficient entiers. On suppose qu'il existe des entiers deux à deux distincts $a, b, c$ *et* $d$ tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$.

Montrer qu'il n'existe pas d'entier $k$ tel que $P(k) = 8$.

**S.** Soit $P$ un polynôme de degré 2000 vérifiant pour tout entier $n \,/\, 0 \leq n \leq 2000$ la relation : $P(n) = \frac{n}{n+1}$

On pose $f(x) = (x + 1)P(x) - x$

**a)** Déterminer $\deg(f)$
**b)** Déterminer les racines de $f$ et en déduire une factorisation de $f(x)$
**c)** Calculer alors $P(2001)$.

**T.** Trouver le reste de la division euclidienne de $A(x) = x^{2018} + 2018$ par $B(x) = x^{2018} - 1$.

**V.** On considère les polynômes $A\ et\ B$ :

$$A(x) = x^3 + x^2 + x - 1\ et\ B(x) = x^2 - x + 2$$

Montrer qu'il existe un couple unique $(P, Q)$ de polynômes vérifiant l'égalité polynomiale :

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1\ avec\ \deg P \leq 1\ et\ \deg Q \leq 2$$

**Exercice 14:**

On appelle **polynôme réciproque** de degré n tout polynôme P($x$) vérifiant :

$$\begin{cases} d^\circ P = n \\ \forall\ x \in \mathbb{R}^*\ P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^n} \end{cases}$$

1. Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\alpha$ est non nul et $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P($x$).
2. Montrer que tout polynôme réciproque de degré n (impair) admet -1 pour racine
3. On suppose que le polynôme $P$ est donné par : $P(x) = (x+1)Q(x)$.
   Démontrer que si $P$ est un polynôme réciproque alors $Q$ l'est aussi.
4. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque
5. Déterminer le polynôme réciproque F de degré 5 admettant pour racines
   $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2 - \sqrt{3}$ et tel que $F(0) = 2$
6. On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on pose :

$P\ (x) = 2x^4 - (5 + 2\sqrt{5})x^3 + (4 + 5\sqrt{5})x^2 - (5 + 2\sqrt{5})x + 2$

a. Vérifier que $P\ (x)$ est un polynôme réciproque

b. Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$ puis en déduire $\phi^3$, $\phi^4$ en fonction de $\phi$

c. En déduire alors que $\phi$ est une racine de $P\ (x)$

d. En utilisant les questions précédentes, résoudre simplement dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)$

**Exercice 15 :**

**A.** Soit le polynôme : $P(x) = a^4(b - x) + b^4(x - a) + (a - b)x^4$ où $a, b$ et $c$ sont des réels distincts.

1. Calculer $P(a)$ et $P(b)$.
2. Soit $F(x) = P(x) - P(a)$.

a- Montrer que $F(x) = P(x) - P(b)$.

b- Prouver que $F(x)$ est divisible par $(x - a)(x - b)$

c- Montrer que $F(c)$ est divisible par l'expression $(a - b)(c - a)(c - b)$.
Déterminer alors le quotient.

**B.** On se propose de résoudre une résoudre une équation de degré 3 ne possédant pas, à priori, de solution particulière.

1. Soit le polynôme $P(x) = 10x^3 - 9x^2 + 9x + 1$.

a) On pose$x = y + a$. Déterminer le polynôme $Q(y)$ obtenu en remplaçant $x$ par $y + a$ dans$P(x)$.

b) Montrer que : $Q(x) = 10(y^3 + \alpha y + \beta) \Leftrightarrow a = \frac{3}{10}$ ; $\alpha = \frac{63}{100}$; $\beta = \frac{79}{250}$

2. Cette partie a pour but de déterminer les racines $Q(y)$
   a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que : $b^3 + c^3 = \beta$ et $-3bc = \alpha$
   b) Prouver que $y^3 - 3bcy + b^3 + c^3$ est factorisable par $y + b + c$
   c) Déduire des questions précédentes que $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{1}{10}$ sont respectivement les racines de $Q(y)$ et $P(x)$.
   d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

**Exercice 16 :**

On donne l'expression :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right]$$

1. Donner l'expression de $P_n(x)$ pour $n \in \{1; 2; 3\}$
2. Vérifier que pour $n$ élément de $\{3; 4\}$on a :

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0, \forall x \in IR \setminus [-1; 1]$$

3. On pose $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$

a- Calculer $u + v$ et exprimer $P_n(x)$ en fonction des fonctions $u$ et $v$.

b- Calculer $(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v)$

c- En déduire que pour $n \geq 3$, on a : $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0$ et que $P_n(x)$ est la restriction à $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ d'un polynôme. Quel est le degré de ce polynôme ?

**Exercice 17 :**

1) On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + |x| \text{ et } g(x) = x - |x|$$

   a) f et g sont-elles des fonctions polynômes ?
   b) Déterminer la fonction produit fg.
2) On considère deux fonctions polynômes $P$ et $Q$ telles que, pour tout $x$, $P(x)Q(x) = 0$ (le polynôme $P(x)Q(x)$ est le polynôme nul.)
   Soit $d°P = n$ et $d°Q = p$.
   Prouver que $P$ admet au moins $n + 1$ racines, ou que $Q(x)$ admet au moins $p + 1$ racines.
   En déduire que $P(x) = 0$ ou $Q(x) = 0$.
3) Quelle propriété non vérifiée par l'ensemble des fonctions est vérifiée par l'ensemble des fonctions polynômes ?

**Exercice 18 :**

**Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas un polynôme à coefficients entiers tel que $a, b, c$ des entiers différents et $P(a) = b, P(b) = c$ et $P(c) = a$.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.

1) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme alors $\alpha$ est une racine $P(x)$.
2) On se propose d'établir la réciproque
   a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha)$$
   b) En déduire que $P(x) - P(\alpha)$ est factorisable par $(x - \alpha)$.

3) Prouver que pour tout couple $(p, q)$ d'entiers, $P(p) - P(q)$ est divisible par $p - q$.
4) Montrer alors qu'il existe trois entiers $\beta, \gamma$ *et* $\delta$ tels que

$$(b-c) = \delta(b-a), (c-a) = \beta(b-c) \text{ et } (a-b) = \gamma(c-a)$$

5) Calculer $\delta\beta\gamma$. En déduire $|b-c| = |c-a| = |a-b|$.
6) Conclure

**Exercice 19 :**

A) Déterminer les polynômes P du second degré tel que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$.
B) On se propose de déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant:

$$P(x^2) = (x^2+1)P(x) \quad (\mathbf{1})$$

1. Vérifier que le polynôme nul est solution de $(\mathbf{1})$.
2. Soit $P(x) = b$ où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si P est solution de $(\mathbf{1})$ alors $b = 0$
3. Soit P un polynôme non constant de degré n non nul
   a) Donner les degrés des polynômes $P(x^2)$ et $(x^2+1)P(x)$
   b) En déduire le degré de tout polynôme P solution de $(\mathbf{1})$
   c) Déduire de la question A) les solutions de $(\mathbf{1})$

**Pensée :**

**« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs**