Axlou Toth pour l'Innovation

0.Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Ndondol (Diourbel)	**SÉRIE D'EXERCICES N°1** **CALCUL DANS IR**	**Niveau** : Seconde S **Professeur** :M. AMAR FALL

EXERCICE 1 :

Ecrire chacun des nombres réels suivants sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers.

$A = 8 \times 32 \times (2^{-4})^3$; $B = \frac{(-6)^5 \times 9^{-3}}{-2^3 \times 3^4}$; $C = \frac{(0{,}09)^{-1} \times (0{,}16)^2 \times 25}{(0{,}0075)^{-1} \times (810)^3}$ et $D = \frac{(0{,}6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0{,}8)^3 \times (0{,}4)^4}$

EXERCICE 2 :

1. Ecrire le plus simplement possible chacun des nombres réels suivants :

$A = 3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20} - \left(3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}\right)$; $B = \frac{3\sqrt{12} - \sqrt{48} - \sqrt{75}}{\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{847}}$;

$C = |2 - \sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}| - 3\sqrt{2}$

2. Calculer $B = (2 + \sqrt{3})^{2019} \times (2 - \sqrt{3})^{2019}$

3. On pose $X = \sqrt{13 - 2\sqrt{22}} - \sqrt{13 + 2\sqrt{22}}$

  a. Déterminer le signe de X.

  b. Calculer X^2. En déduire la valeur de X.

4. Calculer $A = (3\sqrt{2} - 1)^3 - 31(\sqrt{2} + 1)^2 + 148 - \sqrt{2}$ puis factoriser $A(x) = 8x^3 - 27$; $B(x) = (3x - 5)^3 + (4x - 1)^3$ et $C(x) = x^4 + x^2 + 1$

5. Soient a, a', b, b', c et c' des réels strictement positifs tels que: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Montrer que $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}$

6. Soit $b = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}}}$ et soit $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $a^2 = a + 1$. En déduire que $b = a$. Le nombre a est appelé **nombre d'or**.

EXERCICE 3 :

Soit x un reel non nul tel que : $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{3}$. Montrer que $x^6+\frac{1}{x^6}=970$.

EXERCICE 4 : On pose $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Exprimer x^2 et $\frac{1}{x}$ en fonction de x.
2. **a**. Montrer que $13x^5=65x+39$

   b. Montrer que $\frac{5}{x^7}=65x-105$

   c. En déduire que $13x^5-\frac{5}{x^7}=144$

EXERCICE 5:

Démontrer que si $xyz=1$ alors $\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$.

EXERCICE 6:

Soient x, y et z trois réels tous non nuls tel que : $x+y+z=0$. Démontrer que $\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)=9$.

EXERCICE 7:

1. On donne $B=\{34{,}27;-0{,}0045;13{,}43\}$. Calculer $x-E(x)$ pour x appartenant à B.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $E(x-3)=4$ puis $E(|x-3|)=4$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations $E(x)\leq x$; $E(x)\leq 3$ *et* $E(x-2)\geq -5$.

EXERCICE 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

$$-\frac{1}{2}x=\left|\frac{3}{2}x-5\right| \;;\; \left|-\frac{2}{7}x+1\right|\leq 2 \;;\; \sqrt{(x-1)^2}=|3x+2| \;;\; |2x-1|+|3-4x|=5$$

EXERCICE 9 :

1. Démontrer que pour tous réels x et y, on a : $x^2+y^2\geq 2xy$.
2. Déduis-en que si $x>0$ et $y>0$ alors $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.
3. Déduis de **2)** que si $x>0$ alors $x+\frac{1}{x}\geq 2$.
4. Démontrer que pour tous reels non nuls x et y on a: $\frac{x^6}{y^6}+\frac{x^4}{y^4}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^6}{x^6}+\frac{y^4}{x^4}+\frac{y^2}{x^2}\geq 6$

EXERCICE 10 : Montrer que si a, b et c sont des réels strictement positifs alors on a :

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$
2. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$

EXERCICE 11 :

Montrer que $4x^2+y^2\geq 4xy$. En déduire que si $2x+4y=1$ alors $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$

EXERCICE 12 : Soit a et b deux réels strictement positifs

1. Démontrer que $\frac{1}{a^2+b^2}\leq\frac{1}{2ab}$. En déduire que $\frac{a+b}{a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$
2. En utilisant la dernière inégalité démontre que $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}+\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b+c}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a+c}\leq\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$

EXERCICE 13 : Soient a, b et c des longueurs d'un triangle

1. Justifier que $b+c-a; c+a-b\ et\ a+b-c$ sont tous strictement positifs.
2. On pose $X=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}$; $x=b+c-a; y=a+c-b\ et\ \ z=a+b-c$
   a. Démontrer que $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{x+z}{2}$ et $c=\frac{x+y}{2}$. En déduire que $X=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}$
   b. Démontrer que $X\geq 3$

EXERCICE 14 :

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que: $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$. Montrer que $x=a+b+c$

EXERCICE 15: Montrer que si a, b et c sont les longueurs d'un triangle alors $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$

EXERCICE 16: Soient a et b deux réels tels que $a^2+b^2=1$. Montrer que $|a+b|\leq\sqrt{2}$

EXERCICE 17:

Soient a, b et c des reels strictement positifs tels que: $a+b+c=1$

Démontrer que $\frac{a(1-a)^2}{bc}+\frac{b(1-b)^2}{ac}+\frac{c(1-c)^2}{ab}\geq 4$

PENSEE

Notre plus grand problème c'est que nous voulons tout centrer sur notre propre personne. Comprendre et accepter que les autres existent et sont importants ne fait que nous alléger le lourd fardeau que notre propre moi pèse déjà sur nous. Quand je pense que je dois être vu et regardé par tout le monde alors je risque d'être sur un chemin qui s'appelle égoïsme et j'aurai du mal à me départir de mon égo. Cultivons la modestie et respectons nos semblables en acceptant nos différences et en renforçant nos convergences.