Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N°1 du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs** : M. Diallo & M. Sarr

Exercice 1 :

On considère le polynôme H défini par : $H(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.

On considère la propriété (P): pour tout réel x, on a $H(x) = H(2 - x)$

1) Montrer que H vérifie la propriété (P) si et seulement si $a = -4$ et $c = 8 - 2b$.
2) On suppose alors que H vérifie (P). Montrer que H peut s'écrire sous la forme : $H(x) = (x^2 - 2x)^2 + (b - 4)(x^2 - 2x) + d$ avec b, d des réels.

3) **Application :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 5 = 0$.

Exercice 2 :

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$

Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1) Degré 2 : Soit $f: x \longmapsto ax^2 + bx + a, a \neq 0$

Résoudre $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.

2) Degré 3 : Soit $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a, a \neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
   b) Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$
   c) Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
   d) **Application :**

$f: x \longmapsto 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$

3) Degré 4 : Soit $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
4) Soit $y = x + \frac{1}{x}$

a) Déterminer l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fonction de a, b, c, y et y^2
b) Montrer que $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré
c) Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a), f(x) = 0$ n'a pas de solutions.
d) **Application :**

Résoudre l'équation :

$$12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12$$

Exercice 3 :

ABC est un triangle. On note $BC = a, CA = b$ et $AB = c$. L'objectif de cet exercice est de trouver des réels affectés aux points A, B et C tels que le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H ou O le centre du cercle circonscrit au triangle soient des barycentres des sommets.

Partie A : Le centre du cercle inscrit.

A' est le pied de la bissectrice de BAC. A' est donc équidistant des cotés de l'angle BAC. On note d cette distance et h la longueur de la hauteur issue de A.

1) Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ puis en déduire que A' est le barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$
2) B' et C' sont les pieds des bissectrices de ABC et ACB. Exprimer B' comme barycentre de C, A et C' comme barycentre de A et B.
3) Prouver que I est le barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

Partie B : Orthocentre et centre du cercle circonscrit

On se place dans le cas ou les angles de ABC sont tous aigus.

On pose $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta$ et $ACB = \theta$. A_1 est le pied de la hauteur issue de A.

1) Prouver que : $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\tan\theta}{\tan\beta}$.
2) Déduisez-en que A_1 est le barycentre de $\{(B, \tan\beta), (C, \tan\theta)\}$.
3) Enoncer les résultats analogues pour les pieds B_1 et C_1 des hauteurs issues de B et C.
4) Prouver que H, orthocentre de ABC est barycentre de $\{(A, \tan\alpha), (B, \tan\beta), (C, \tan\theta)\}$
5) MNP sont les milieux de [BC], [CA] et [AB].
   a) Justifier que les médiatrices du triangle ABC sont des hauteurs du triangle MNP.
   b) Exprimer alors O comme le barycentre de M, N et P.
   c) Déduisez-en que O, centre du cercle circonscrit à ABC, est le barycentre A, B et C affectés des coefficients que vous préciserez.

Récréation mathématique :

« Si six chats chopent six souris en six secondes ……………………….. Cent chats chopent cent souris en cent secondes »